# 1

# Einführung in die Algebra

## 1.1 Wichtige Formeln

| Formel | Symbol | Definition | | Wert | Bedingungen |
|---|---|---|---|---|---|
| Fakultät | $n!$ | $\prod_{k=1}^{n} k$ | $=$ | $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ |
| Binomial-koeffizient | $\binom{n}{k}$ | $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ | $=$ | $\prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{j+1}\right)$ | $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, 0 \leq k \leq n$ |
| Binomische Formeln | | $(a \pm b)^2$<br>$(a+b)(a-b)$ | $=$<br>$=$ | $a^2 \pm 2ab + b^2$<br>$a^2 - b^2$ | $a, b \in \mathbb{R}$ |
| Binomischer Lehrsatz | | $(a+b)^n$ | $=$ | $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ | $n \in \mathbb{N}\,,\, a, b \in \mathbb{R}$ |

| Potenzen | $a =$ Basis, $n =$ Exponent | |
|---|---|---|
| **Definition** | $a^n = \prod_{i=1}^{n} a, \; a \neq 0$<br>$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; a \neq 0, \; n \in \mathbb{N}$ | $a^0 = 1$ |
| **Gesetze** | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$<br>$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$<br>$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$ | $a^m \cdot b^m = (ab)^m$<br>$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ |

| Wurzeln | $a =$ Radikand, $n =$ Wurzelexponent | |
|---|---|---|
| **Definition** | $\sqrt[n]{a} = b$, wenn $b^n = a$<br>$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \sqrt[1]{a} = a$<br>$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ | $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \; n \in \mathbb{N}$<br>$(\sqrt[n]{a})^n = a$ |
| **Gesetze** | $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$<br>$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$<br>$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ | $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$<br>$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$<br>$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ |

**Kenntnisse und Fähigkeiten**:

Bruchrechnung, Potenz- und Wurzelgesetze, Ausklammern von Faktoren, Multiplikation und Division von Polynomen, Binomische Formeln

**Versuchen Sie, möglichst ohne Taschenrechner zu lösen!**

## 1.2 Brüche

**Aufgabe 1.1 •** Berechnen Sie

a) $(-4) \cdot (-3 - (-2a)) + 2a - 3$

b) $21a \cdot (-4b) + (-9b) \cdot (-2a)$

c) $a \cdot (7a - (-4a)) + 2ab - 8$

**Aufgabe 1.2 •** Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a) $2,1 + \frac{7}{12} - \frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2b} - \frac{5}{3b}$ d) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)$

**Aufgabe 1.3 •** Kürzen Sie so weit wie möglich.

a) $\frac{204a^2b^3c}{255ab^2c^3}$

b) $\frac{5x^2+1}{15x^2+1} \cdot \frac{a-3}{a-12}$

c) $\frac{2a+a^2+1}{2a^2-2}$

d) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

e) $\dfrac{\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{xy^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

**Aufgabe 1.4 •** Fassen Sie zu einem Bruch zusammen, und kürzen Sie so weit wie möglich.

a) $\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{2x^4} + \frac{5}{6x}$ b) $\frac{a^2-b^2}{2a(a+b)}$ c) $\frac{-abc}{a-b} \cdot \frac{b-a}{(-b)c} \cdot \frac{1}{a}$

**Aufgabe 1.5 •** Entscheiden Sie **ohne** Taschenrechner, ob für die folgenden Brüche Gleichheit vorliegt:

a) $\frac{7}{4}, \frac{175}{10}$ b) $\frac{9}{32}, \frac{51}{114}$ c) $\frac{13}{8}, \frac{143}{88}$ d) $\frac{22-11}{11}, \frac{9}{114-123}$

**Aufgabe 1.6 ••** Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a) $\frac{(2x^2y^3)^4}{(4x^3y^4)^2}$

b) $(x^{-3}y^2)^4x^{2^3}$

c) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

d) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{1 + \frac{a+1}{a-1}}$

e) $\dfrac{6-10x}{4x + \dfrac{15}{5 + \dfrac{30x}{2-6x}}}$

f) $\frac{1}{a^nb^{n-3}} - \frac{3}{a^{n-1}b^{n-2}} + \frac{3}{a^{n-2}b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-3}b^n}, \ n \in \mathbb{N}$

g) $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2-1}$

**Aufgabe 1.7 •** Führen Sie die Polynomdivision aus:

a) $(24x^4 - 26x^3 - 76x^2 - 32x) : (4x^2 - 7x - 8)$

b) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

c) $(x^4 - y^4) : (x - y)$

---

**Zusatz •••** Es ist zu addieren:

a) $\dfrac{7a+2b}{6ab-2b^2} - \dfrac{6a^2+7b^2}{9a^2b-b^3} - \dfrac{6a^2-4b^2}{27a^3-3ab^2} - \dfrac{3a-4b}{9a^2+3ab}$

b) $\dfrac{u^2}{4u^2-4uv+v^2} - \left(\dfrac{v}{v+2u}\right)^2 - \dfrac{u^2+v^2}{4u^2-v^2} + \dfrac{uv(6uv-5v^2)}{(4u^2-v^2)^2}$

## 1.3 Fakultät, Summenzeichen, Binomialkoeffizient

**Aufgabe 1.9 •** Faktorisieren Sie, d. h. schreiben Sie als Produkt

$$(x+2y)(x-y)(-2x+y) - y(6x-3y)(2y-2x)$$

**Aufgabe 1.10 •** Faktorisieren Sie unter Verwendung binomischer Formeln

a) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

b) $-\frac{1}{4}x^2 - 4y^2 - 2xy$

c) $(-a-1)(a-1) - (a^2-1)$

**Aufgabe 1.11 •** Schreiben Sie mittels quadratischer Ergänzung als Summe bzw. Differenz von Quadraten

a) $x^2 - 4x + 13$

b) $x^2 + 4ax + 9b^2$

c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y$

**Aufgabe 1.12 •** Ermitteln Sie die Summen:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{i}{i+3}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-k)^k$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$

**Aufgabe 1.13 •** Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{4}{2}$

b) $\binom{8}{3}$

c) $\binom{21}{17}$

## 1.4 Potenzen und Wurzeln

**Aufgabe 1.14 •** Berechnen bzw. vereinfachen Sie!

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

b) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7}$

c) $\frac{a^5 a^3 a^{-2}}{a^{-3} a^6}$

d) $(1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 - x)$

e) $2^5 + 2^5 = 2^x$

f) $\frac{2^{26} - 2^{23}}{2^{26} + 2^{23}} = \frac{z}{3}$

**Aufgabe 1.15 •** Vereinfachen Sie folgende Terme weitestmöglich ($x, y \in \mathbb{R}$).

a) $\frac{(12^2)^4 \cdot (8^4)^3}{(4^4)^6}$

b) $\frac{(2ax + 2ay)^m (bx - by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$

c) $\frac{a^{5x-y}}{b^{6n-2}} \div \frac{a^{4x-y}}{b^{n-3}}$, $n \in \mathbb{N}$

d) $\frac{2}{x^{-1}} + 3x - x^2 + \frac{3}{x^{-2}}$

e) $\frac{p^2 + pq}{(u^2 - v^2)^4} \cdot \frac{(u + v)^4}{p^2 - q^2}$

f) $\frac{2^4 x^5 y^7 z^8}{4x^2 y^5 z^{10}} : \frac{2x^2 y^5 z^8}{5x^4 y^3 z^5}$

g) $(2y)^{1-q} \cdot (2y)^{q-2}$

h) $\left(\frac{4a^{-2}x}{3a^5 x^{-3}}\right)^2 \div \frac{(3a^4 x^2)^{-3}}{(2ax^{-3})^{-2}}$

i) $\frac{3 - a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}}$

**Aufgabe 1.16 •** Berechnen bzw. vereinfachen Sie!

a) $\sqrt{25 \cdot 16}$ b) $(1 - \sqrt{2})^2$ c) $-\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{6})$ d) $\sqrt[3]{27a^6}$

**Aufgabe 1.17 •** Vereinfachen Sie die Terme:

a) $\sqrt{x^3 y^2} \cdot \sqrt[4]{x^9} \cdot \sqrt[3]{y^2}$

b) $\left(\sqrt[10]{x^2 - 2xy + y^2}\right)^5$

c) $\sqrt[n]{a^{n+3}}\sqrt[3]{a^{3n+1}}\sqrt[3]{a^{-1}}$

d) $\left[4^{-1/4} + \left(\frac{1}{2^{-3/2}}\right)^{-4/3}\right] \cdot [4^{-0{,}25} - (2\sqrt{2})^{-4/3}]$

e) $x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

f) $\sqrt{a^2 b^{-2}}\sqrt[3]{27ab^3}\sqrt{(a + 1)^2}$

g) $5\sqrt{63} - 2\sqrt{175} - \sqrt{343} + 3\sqrt{28}$

h) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

i) $\left(\sqrt[3]{10^{\sqrt{3}}}\sqrt{10}\right)^{\sqrt{3}}$

**Aufgabe 1.18 •** Machen Sie den Nenner von $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ rational.

# 2

# Gleichungen, Ungleichungen und Beträge

## 2.1 Wichtige Formeln

**absoluter Betrag** $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$

**Eigenschaften**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lvert a \rvert \geq 0$ | (1) | $\lvert a \rvert = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$ | (5) |
| $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$ | (2) | $\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ | (6) |
| $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert},\; b \neq 0$ | (3) | $\lvert a^r \rvert = \lvert a \rvert^r$ | (7) |
| $\lvert a \rvert = \sqrt{a^2}$ | (4) | $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ | (8) |

**Polynom** $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$

**Nullstellen** Lösungen der Bestimmungsgleichung $p_n(x) = 0$

**Linearfaktor-Zerlegung** für Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i$ sämtlich verschieden)

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

für Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ $\quad x_i = \lambda_i$-fache Nullstelle $\quad (\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = n)$

$$p_n(x) = (x - x_1)^{\lambda_1}(x - x_2)^{\lambda_2}\cdots(x - x_r)^{\lambda_r}$$

**Wurzeln von** $p_n(x) = 0$ $\quad h_n(x) = \frac{1}{a_n}p_n(x) = x^n + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$

Lösung $x = x_1$ **bekannt, erkannt** oder **berechnet**:

Polynomdivision: $h_n(x) \div (x - x_1) = x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$

**Quadratische Gleichung** $x^2 + px + q = 0 \qquad \left[h_2(x) = \frac{1}{a_2}(a_2x^2 + a_1x + a_0)\right]$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

**Wurzelsätze des Vieta** Sind $x_1, x_2$ die Nullstellen der quadratischen Gleichung, so gilt $-(x_1 + x_2) = p$ sowie $x_1 \cdot x_2 = q$

**Horner-Schema** zur Berechnung von Funktionswerten $p_n(x_0)$

| $P_n(x)$ | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\cdots$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | + | + | | + | + | + |
| $x_0$ | | $x_0 \cdot e_{n-1}$ | $x_0 \cdot e_{n-2}$ | | $x_0 \cdot e_2$ | $x_0 \cdot e_1$ | $x_0 \cdot e_0$ |
| $P_{n-1}(x)$ | $e_{n-1}$ | $e_{n-2}$ | $e_{n-3}$ | $\cdots$ | $e_1$ | $e_0$ | $r$ |

**Kenntnisse und Fähigkeiten**:

Umformen von linearen und quadratischen Gleichungen, Bruchgleichungen, Wurzelgleichungen, Absolutbetrag, Umformen von Ungleichungen, Ungleichungen mit Beträgen.

## 2.2 Lösen von Gleichungen $n$-ten Grades

**Aufgabe 2.1 •** Bestimmen Sie die reellen Lösungen folgender Gleichungen

a) $-16x^2 + 6x - 1 = 4$

b) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

d) $(x-1)^2(x+2) = 4(x+2)$

e) $\dfrac{5+2x}{3-2x} - \dfrac{4-3x}{x} = \dfrac{2x}{x-1}$

f) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

g) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

h) $a + x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}$

i) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

j) $\dfrac{3x+10}{x-14} + x = 2, \quad x \neq 14$

**Aufgabe 2.2 •** Bestimmen Sie den Parameter $c$ so, daß $2x^2 + 4x = c$ genau eine doppelte (reelle) Lösung hat (d. h. $x_1 = x_2$).

**Aufgabe 2.3 •** Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ sind.

**Aufgabe 2.4 •** Lösen Sie die Gleichungen!

a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 0$

b) $\sqrt{2x^2 - 3} + x = 0$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x+6} = 0$

d) $\sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}} = 1$

e) $\sqrt{\sqrt{4-x} + 2} - 3 = 0$

f) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$

g) $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{7x-10} = 7\sqrt{x-1}$

h) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$

**Aufgabe 2.5 •** Zeigen Sie, daß die folgende Wurzelgleichung keine reelle Lösung haben kann, ohne diese Gleichung zu lösen.

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} = 3$$

**Aufgabe 2.6 •** Lösen Sie die folgenden Formeln nach den gesuchten Größen auf:

a) $x = \dfrac{2}{3}(y-3) + y$ nach $y$

b) $I = \dfrac{nU}{nR_i + R_a}$ nach $n, R_i, R_a$

c) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} - \dfrac{d}{f_1 f_2}$ nach $f, f_1$

d) $X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ nach $\omega$

## 2.3 Rechnen mit Beträgen

**Aufgabe 2.7 •** Fassen Sie, wenn möglich, zusammen! (Dabei sind $a, b, x \in \mathbb{R}$, d. h., eine Fallunterscheidung kann notwendig sein!)

a) $\dfrac{|x|^2|a|}{|xa|}$

b) $\dfrac{a}{|a|}$

c) $\dfrac{|ab||a|^2x}{|xa||b|}$

d) $|x-1|+|x+1|$

**Aufgabe 2.8 •** Schreiben Sie ohne Betrag

a) $|4a^2-13a+10+2(11a-3)-9a|$

b) $|34a-2\cdot(345a-12)|$, $a<0$

**Aufgabe 2.9 •** Schreiben Sie mit Hilfe von Betragszeichen

a) $\sqrt{a^2}$

b) $\sqrt{x^2+4x+4}$

c) $M=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-7<x<23\}$

d) $M=\{x\in\mathbb{R}\,|\,4\le x\le 16\}$

**Aufgabe 2.10 •** Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen im Bereich der reellen Zahlen:

a) $|x^2-2x|=24$

b) $|x+1|=|x-1|+1$

c) $|x^2+2x+1|=x$

d) $\dfrac{|x+7|}{|x-3|}=5$

## 2.4 Lösen von Ungleichungen

**Aufgabe 2.11 •** Bestimmen Sie die (reellen) Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen!

a) $2x-8>|x|$

b) $x^2+2x-3\le 0$

c) $2x^2-10x+8>0$

d) $|x-3|+|2x-4|\le 7$

e) $\mathrm{d}\frac{x-1}{x+1}<1$

f) $|x-6|>x^2$

g) $\sqrt{(1+x)(x+4)}>2$

h) $\left|\dfrac{x-3}{2x+3}\right|<1$

i) $\dfrac{|x-3|}{2x+3}<1$

**Aufgabe 2.12 •** Lösen Sie grafisch:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}\ge 3$

b) $|x^2-2x|>\frac{3}{4}$

c) $|2x-5|>2\cdot|x+1|$

# 3 Funktionen

## 3.1 Wichtige Zusammenhänge

Eine *Funktion* $f$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ zuordnet.

| Funktionen | $y = f(x)$ bzw. $F(x; y) = 0$ | |
|---|---|---|
| **Monotonie** | für $x_1 < x_2$ | |
| | $f(x_1) \le f(x_2)$ *monoton wachsend* | $f(x_1) < f(x_2)$ *streng* ~ |
| | $f(x_1) \ge f(x_2)$ *monoton fallend* | $f(x_1) > f(x_2)$ *streng* ~ |
| **Periodizität** | $f(x + kp) = f(x)$ | $p$ – Periode; $k \in \mathbb{Z}$ |
| **Symmetrie** | *ungerade Fkt.* $f(-x) = -f(x)$ | *gerade Fkt.* $f(-x) = f(x)$ |
| **Inverse** | *Voraussetzung für Umkehrbarkeit*: | eineindeutige Zuordnung |
| | $y = f(x) \;\leftrightarrow\; x = \varphi(y)$ | $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$ |

| Logarithmen | $a$ = Numerus, $b$ = Basis | |
|---|---|---|
| **Definition** | $b^z = a$, wenn $z = \log_b a$ | $(b > 0,\ b \neq 1)$ |
| | $\log_b b = 1,\ \log_b 1 = 0$ | $\log_b z = \log_b a \cdot \log_a z$ |
| **Gesetze** | $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ | $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ |
| | $\log a^n = n \cdot \log a$ | $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$ |

| Winkelfunktionen | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a \sin(bx + c)$ | |
|---|---|---|
| **Gradmaß ./. Bogenmaß** | $1^\circ = (\pi/180)[\text{rad}] \approx 0{,}017\,[\text{rad}]$ | $1[\text{rad}] = (180/\pi)^\circ \approx 57{,}3^\circ$ |
| **Beziehungen** | $\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi - 90^\circ)$ | (Gradmaß) |
| | $\sin\varphi = -\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ | (Bogenmaß) |
| **trigonometrischer Pythagoras** | $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ | |

**Wertetabelle**

| Winkel $\varphi$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | Hinweis |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bogenmaß | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | |
| $\sin(x)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ | ← „Eselsbrücke“ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | |

**Kenntnisse und Fähigkeiten**:

Funktionen und ihre Eigenschaften, Umkehrfunktion, Potenz-, Exponential- und Logarithmenfunktionen, trigonometrische Funktionen

## 3.2 Algebraische Funktionen

**Aufgabe 3.1 •** Geben Sie explizite Darstellungen der folgenden Funktionen $f(x)$ an!

a) $3x - 5y = 10$ b) $2x + \frac{y}{4} = 1$ c) $4x^2 - \frac{3}{2}y + x - 9 = 0$

**Aufgabe 3.2 •** Ermitteln Sie die reellen Nullstellen und die Schnittpunkte mit der $y$–Achse der Funktionen!

a) $y = (x-1)(x+2)$ b) $y = x^2 - 2x - 3$ c) $y = x^2 + 1$

**Aufgabe 3.3 •** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind!

a) $y = x^9 + x^7$ b) $y = |x|$ c) $y = (x-3)^2$

**Aufgabe 3.4 •** Welchen Definitions- und Wertebereich haben die Funktionen $f(x)$? Berechnen Sie, falls vorhanden (auch für Teilintervalle), die Umkehrfunktionen!

a) $y = f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3}$ b) $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ c) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$

**Aufgabe 3.5 •** Bestimmen Sie $f(x \pm 1)$, $f(x) \pm 1$, $-f(x)$, $f(-x)$, $2f(x)$ und $f(2x)$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen!

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

**Aufgabe 3.6 •** Bestimmen Sie die Stellen, an denen die gebrochen rationalen Funktionen Nullstellen, Pole und Definitionslücken besitzen!

a) $y = \frac{3x-2}{x+1}$ b) $y = \frac{1-x^2}{x^2-2x-3}$ c) $y = \frac{x^2+x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$

## 3.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

**Aufgabe 3.7 •** Berechnen Sie $x$ unter Verwendung der Definition des Logarithmus!

a) $\log_5\left(\sqrt[6]{25}\right) = x$
b) $\log_{0,5}\frac{1}{32} = x$
c) $\log_x 8 = 3$
d) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$
e) $4^x = 64$
f) $3^x = \frac{1}{27}$
g) $\log_2 x = 6$
h) $\ln x = 0$
i) $\lg x = -2$

**Aufgabe 3.8 ••** Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen!

a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$
b) $3^{x+1} - 2 = 9^x$
c) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

**Aufgabe 3.9 ••** Lösen Sie die folgenden logarithmischen Gleichungen!

a) $\log_4(x+2) = -3$
b) $\ln(x-1)^2 = 2$
c) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$
d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

**Aufgabe 3.10 ••** Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen!

a) $y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 1$
b) $y = \mathrm{e}^{|x|}$
c) $y = 2\ln(0,5x - 1)$

## 3.4 Winkelfunktionen

**Aufgabe 3.11 •** Beweisen Sie mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**Aufgabe 3.12 ••** Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen!

a) $y = 4\sin(3x - \pi)$
b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$

# 4 Differentialrechnung

## 4.1 Wichtige Formeln

**Definition**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

| Regel | | Beispiele |
|---|---|---|
| **Faktorregel** | $[C \cdot f]' = C \cdot f'$ | $[5x]' = 5[x]'$ |
| **Summenregel** | $[f \pm g]' = f' \pm g'$ | $[\mathrm{e}^x \pm \ln x]' = [\mathrm{e}^x]' \pm [\ln x]'$ |
| **Produktregel** | $[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$ | $[\mathrm{e}^x \cdot x^2]' = [\mathrm{e}^x]' \cdot x^2 + \mathrm{e}^x \cdot [x^2]'$ |
| **Quotientenregel** | $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ | $\left[\frac{x}{\cos x}\right]' = \frac{[x]' \cdot \cos x - x \cdot [\cos x]'}{\cos^2 x}$ |
| **Kettenregel** | $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g)\right]' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ | $[\ln(\sin(3x))]' = \frac{1}{\sin(3x)} \cdot \cos(3x) \cdot 3$ |

| Kurvendiskussion | $y = f(x) \qquad (n \in \mathbb{N})$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Kurvenanstieg** | | $f'(x) < 0$<br>**fallende** Kurve | $f'(x) = 0$<br>*waagerechte Tangente* | $f'(x) > 0$<br>**steigende** Kurve |
| **Extremwerte** | N<br>H<br>(1) | $f'(x) = 0$ und<br>$f^{(2n)}(x) < 0$<br>**Maximum** | $f'(x) = 0$ und<br>$f''(x) = 0$<br>*Sattelpunkt* | $f'(x) = 0$ und<br>$f^{(2n)}(x) > 0$<br>**Minimum** |
| **Wendepunkte** | N<br>H<br>(2) | $f'(x) = f''(x) = 0$<br>und<br>$f^{(2n+1)}(x) < 0$<br>**Sattelpunkt** bei fallender Kurve | $f''(x) = 0$<br>und<br>$f'''(x) \neq 0$<br>**Wendepunkt** | $f'(x) = f''(x) = 0$<br>und<br>$f^{(2n+1)}(x) > 0$<br>**Sattelpunkt** bei steigender Kurve |

N | H *notwendige* | *hinreichende* Bedingung
erste nicht verschwindende Ableitung **gerader** (1) bzw. **ungerader** (2) Ordnung

**Kenntnisse und Fähigkeiten**

Ableitungsregeln (Faktor- und Additionsregel, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) für Funktionen $y = f(x)$, Extremwertermittlung, Kurvendiskussion

## 4.2 Ableitungsbegriff und -regeln

**Aufgabe 4.1 •** Ermitteln Sie jeweils die erste Ableitung $f'(x)$

a) $f(x) = 3 - x^2 + 7\sqrt[3]{x}, \quad x > 0$

b) $f(x) = 1 + x^{-2} - 3x^{-4}, \quad x \neq 0$

c) $f(x) = (1 - x)(x^2 + 6x + 8)$

d) $f(x) = 2\ln(x) - 3e^x + \dfrac{5}{x}, \ x > 0$

e) $f(x) = 2^x - \lg(x) + \dfrac{3}{x^2}, \quad x > 0$

f) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

g) $f(x) = x^n \ln(x), \qquad x > 0$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}, \qquad x > 0$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}, \qquad |x| \neq 1$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}, \quad x \in (-1; 1)$

**Aufgabe 4.2 ••** Differenzieren Sie die folgenden Funktionen **zweimal** nach $x$!

a) $f(x) = (2x - 5)^{11}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}, \ x > 0$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right), \ x < -1$

## 4.3 Anwendungen

**Aufgabe 4.3 ••** Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch

a) $y = x^3 - x^2 - 11x$

b) $y = \dfrac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}, \quad x \neq 2$

**Aufgabe 4.4 •** Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang $U$ ist jenes mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

**Aufgabe 4.5 ••** Unter welchem Winkel schneiden einander die Sinus- und Kosinuskurve?

# 5 Integralrechnung

## 5.1 Integrationsregeln und Grundintegrale

| Regel | | Beispiele |
|---|---|---|
| **Faktor-∼** | $\int C \cdot f \; \mathrm{d}x = C \cdot \int f \; \mathrm{d}x$ | $\int 5x \; \mathrm{d}x = 5 \int x \; \mathrm{d}x$ |
| **Summen-∼** | $\int (f \pm g) \; \mathrm{d}x = \int f \; \mathrm{d}x \pm \int g \; \mathrm{d}x$ | $\int (\mathrm{e}^x \pm x) \; \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \; \mathrm{d}x \pm \int x \; \mathrm{d}x$ |
| **Produkt-∼** | $\int f \cdot g' \; \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g \; \mathrm{d}x$ | $\int 1 \cdot \ln x \; \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x$ |

| Hauptsatz | $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(x)\big\|_a^b = F(b) - F(a), \; F'(x) = f(x)$ |
|---|---|
| **Eigenschaften** | $\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \; \mathrm{d}x \,, \; \int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = \int_a^c f \; \mathrm{d}x + \int_c^b f \; \mathrm{d}x$ |

| Grundintegrale | $f(x)$ | $\int f(x) \; \mathrm{d}x$ | Bedingungen |
|---|---|---|---|
| **Potenzfunktionen** | $x^n$ | $\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & (n \neq -1) \\ \ln\|x\|, & (n = -1) \end{cases}$ | |
| | $\frac{1}{x^n}$ | $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $(x \neq 0, n > 1)$ |
| | $\sqrt[n]{x^m}$ | $\frac{n}{m+n} \sqrt[n]{x^{m+n}}$ | |
| **Exponential- und Logarithmusfunktionen** | $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | |
| | $a^x$ | $\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$ | $(a > 0, \; a \neq 1)$ |
| | $\ln x$ | $x(\ln x - 1)$ | |
| **Winkelfunktionen** | $\sin x$ | $-\cos x$ | |
| | $\cos x$ | $+\sin x$ | |
| | $\tan x$ | $-\ln(\cos x)$ | |

**Kenntnisse und Fähigkeiten**

Grundintegrale, unbestimmtes und bestimmtes Integral, Integrationstechniken, Flächenberechnungen

## 5.2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

**Aufgabe 5.1 •** Ermitteln Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale

a) $-\int \frac{nx^n}{n-1}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\sin\alpha}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int (3x^4 - 5x^2 + 10)\,\mathrm{d}x$

d) $\int \left(x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

e) $\int (\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x^3})\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{\sqrt[3]{x^7} - 3\sqrt[5]{x^2}}{x^6}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x-2}}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

**Aufgabe 5.2 •** Integriere mittels Substitution!

a) $\int \sin 4x\,\mathrm{d}x$ b) $\int \cos(-2x+1)\,\mathrm{d}x$ c) $\int \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t$

**Aufgabe 5.3 ••** Integrieren Sie $\int (4-2x)^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ mittels partieller Integration!

**Aufgabe 5.4 •••** Berechnen Sie $\int (x^3\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$ mittels

a) partieller Integration,

b) Substitution einer rationalen Funktion,

c) einer trigonometrischen Substitution.

## 5.3 Bestimmtes Integral

**Aufgabe 5.5 ••** Berechnen Sie:

a) $\int\limits_0^2 (x^2 - 3\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_0^2 |x^2 - 3x + 2|\,\mathrm{d}x$ c) $\int\limits_{-1}^1 x^n\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$

**Aufgabe 5.6 ••** Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der $x$-Achse und der durch $y = f(x), x \in \mathbb{R}$ gegebenen Kurve eingeschlossen wird.

a) $y = f(x) = x^2 - 1$ b) $y = f(x) = x(x-1)(x-3)$

**Aufgabe 5.7 ••** Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-1; 5]$ von den beiden Funktionen

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad y = \tfrac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + x + 11)$$

eingeschlossen wird.